



TME²

3º TORNEIO DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS ESTADUAIS DO PIAUÍ

PI

2ª Fase

Ensino Médio
23 de agosto de 2025

QUADRO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO:



ASSINATURA DO(A) ALUNO(A)

INSTRUÇÕES:

- Confira atentamente as suas informações contidas no QUADRO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO. Caso identifique qualquer problema ou inconsistência, comunique imediatamente ao professor ou ao responsável pela aplicação do exame.
- A duração da prova é de 2 horas. Você só poderá deixar a sala 45 minutos após o início da prova. Ao terminar a prova, entregue-a ao aplicador.
- Não é permitido:
 - usar instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta;
 - comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas;
 - usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, tablets, relógios com calculadora etc.).
- Esta prova é discursiva e contém 04 problemas, com 20 pontos cada, totalizando 80 pontos.
- A solução de cada problema deve ser escrita na página reservada para ela, de maneira organizada e legível.
- Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todos os problemas.
- Respostas sem justificativa não serão consideradas na correção.**
- Os problemas podem ser respondidos a lápis ou a caneta, de forma legível.
- Não se esqueça de assinar no local indicado no QUADRO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO.

O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.

Boa prova!

REALIZAÇÃO:



SECRETARIA
DA EDUCAÇÃO - SEDUC



GOVERNO DO
PIAUI
AQUI TEM TRABALHO.
AQUI TEM FUTURO.

Problema 1

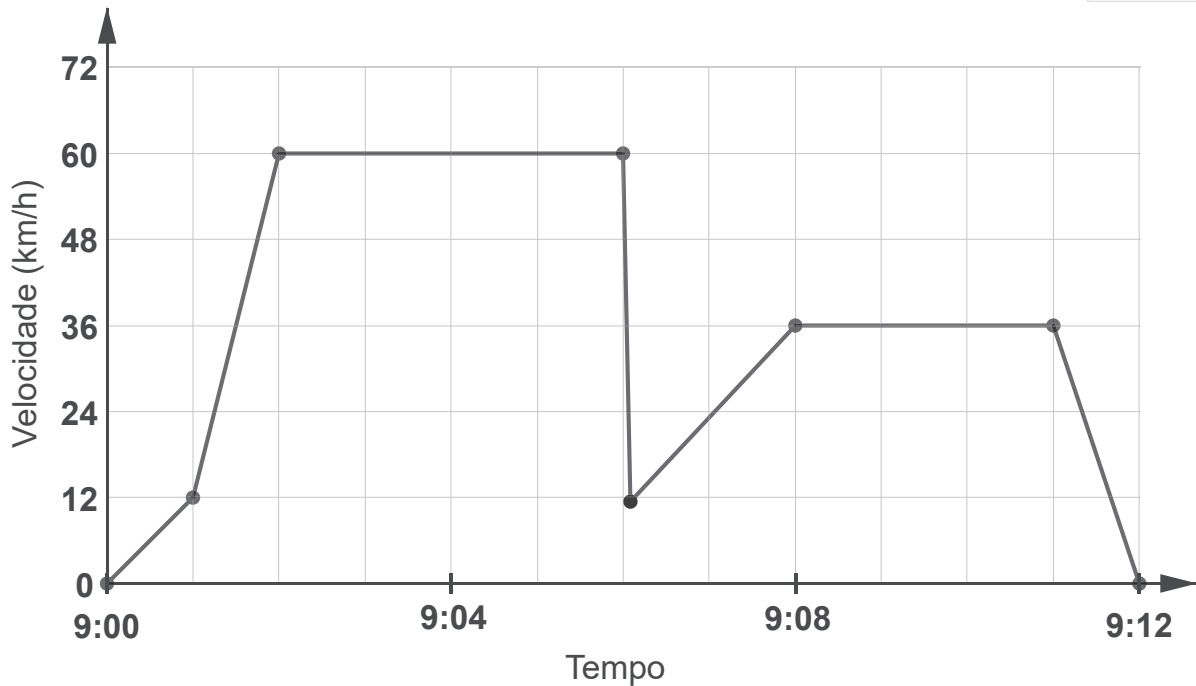
Kelly foi dar uma volta em seu carro. Durante a viagem, um gato correu na frente do carro. Kelly pisou no freio e evitou acidentarse o gato. Um pouco abalada, Kelly decidiu voltar para casa.

O gráfico abaixo é um registro simplificado da velocidade do carro durante a viagem.

CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO



NÃO RASURAR



(a) Qual foi a velocidade máxima do carro durante a viagem?

(b) Que horas eram, aproximadamente, quando Kelly pisou no freio para evitar o gato?

(c) O caminho que Kelly percorreu para voltar para casa foi mais curto do que a distância que ela percorreu de casa ao local onde ocorreu o incidente com o gato? Dê uma explicação para apoiar sua resposta, usando as informações fornecidas no gráfico.

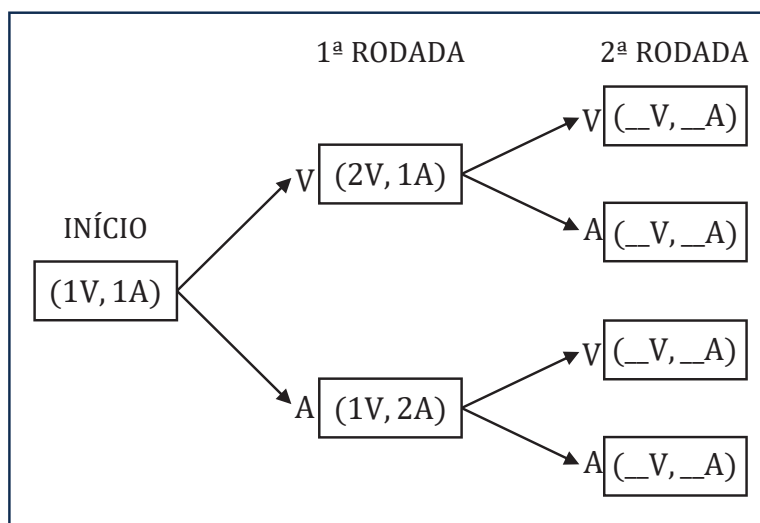
Problema 2

Considere o seguinte experimento: uma urna contém inicialmente 1 bola vermelha e 1 bola azul, distintas apenas pela cor. A cada rodada, realiza-se o procedimento:

- Sorteia-se uma bola aleatoriamente da urna;
- Observa-se a cor da bola;
- A bola é devolvida à urna, junto com mais uma bola da mesma cor.

Por exemplo, se no início do jogo (primeira rodada), a bola azul é a sorteada, para a segunda rodada a urna terá 3 bolas: 1 vermelha e 2 azuis.

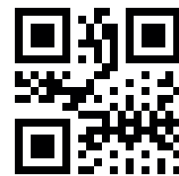
(a) Complete o diagrama indicando, em cada caso, como ficará a composição da urna — quantidade de bolas vermelhas (V) e azuis (A) — ao final da segunda rodada.



(b) Justifique por que, encerrada a terceira rodada, não é possível que a urna esteja com quantidades iguais de bolas da mesma cor.

(c) Em um dado momento do experimento, o número de bolas azuis é o dobro do número de bolas vermelhas (isso poderia ocorrer, por exemplo, ao fim da primeira rodada). Quais outras rodadas são possíveis ocorrer novamente?

CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO



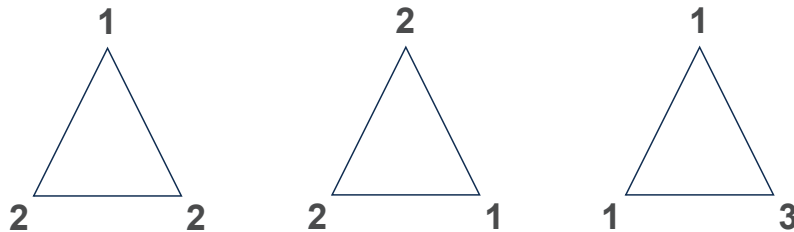
NÃO RASURAR

Problema 3

Em cada vértice de um polígono regular, deseja-se escrever um número inteiro positivo. Esses números devem satisfazer a seguinte condição:

A soma de cada número com os seus dois vizinhos imediatos (um de cada lado) deve ser sempre igual a um mesmo valor (constante).

(a) Beatriz usou um triângulo. Ela fez tal procedimento de modo que a constante fosse igual a 5. Abaixo, estão alguns exemplos de triângulos já preenchidos corretamente.



Desenhe três outras maneiras distintas de preencher os vértices com inteiros positivos cuja soma local (cada número com os dois vizinhos) seja igual a 5.

Observação: o polígono não sofre rotações.

(b) Agora, Beatriz usou um hexágono. Ela deseja preenchê-lo de modo que a constante ainda seja igual a 5.

Quantos hexágonos diferentes existem? Ou seja, quantas maneiras distintas existem de preencher os seis vértices do hexágono A, B, C, D, E e F, com inteiros positivos, de modo que a soma de cada número com seus dois vizinhos imediatos seja sempre igual a 5?

(c) E se o polígono tiver 12 lados e a constante for igual a 20? Quantas maneiras distintas existem de preencher os vértices com inteiros positivos que satisfaçam a condição?

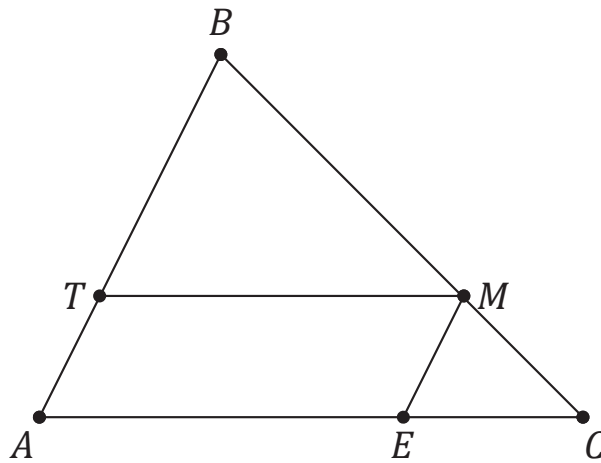
CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO



NÃO RASURAR

Problema 4

Na figura, considere o triângulo ABC e o paralelogramo $TMEA$, com $T \in \overline{AB}$, $M \in \overline{BC}$ e $E \in \overline{AC}$. Considere que $\mathcal{A}(ABC)$ representa a área do triângulo ABC .

**CÓDIGO DE IDENTIFICAÇÃO****NÃO RASURAR**

(a) Justifique que os triângulos BTM , BAC e MEC são semelhantes.

(b) Demonstre que $\sqrt{\mathcal{A}(ABC)} = \sqrt{\mathcal{A}(BTM)} + \sqrt{\mathcal{A}(MEC)}$. Ou seja, explique por que a igualdade é verdadeira.

Problema 5

Em 2011, a OBMEP denominou como *múltiplo irado* de n o menor dos múltiplos de n que possa ser escrito empregando-se apenas os algarismos 0 e 1.

Por exemplo, o irado de 3 é o 111, já o irado de 7 é o 1001.

(a) O número 10 é irado de si mesmo e de mais outros dois números inteiros positivos. Quais são esses outros dois números?

CÓDIGO DE
IDENTIFICAÇÃO



NÃO RASURAR

(b) Usamos a sequência 1, 11, 111, 1111, 11111, 111111 para encontrar o *irado* do número 6. Os restos que cada termo dessa sequência deixa, ao ser dividido por 6, são, respectivamente: 1, 5, 3, 1, 5, 3.

A diferença $1111 - 1 = 1110$ (entre os dois primeiros termos da sequência que deixam o mesmo resto na divisão por 6) é divisível por 6 e contém apenas os dígitos 1 e 0. Portanto, 1110 é *múltiplo irado* de 6.

Encontre agora o *irado* de 12 usando a mesma estratégia.

(c) Veja uma outra maneira de encontrar o *irado* de 6:

Os dois primeiros candidatos possíveis são 10 e 11. Como nenhum deles é múltiplo de 6, tentamos os seguintes: 100, 101, 110 e 111. Novamente, nenhum é múltiplo de 6. Continuamos com: 1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110 e 1111. Como 1110 é divisível por 6, ele é o *irado* de 6.

Encontre o *irado* de 13.

(d) Prove que todo número inteiro positivo possui um múltiplo irado. Ou seja, justifique a afirmação de que: *Todo número inteiro positivo tem pelo menos um múltiplo que pode ser escrito utilizando apenas os algarismos 0 e 1.*

