SEDUC OLÍMPICA

TME²

3º TORNEIO DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS ESTADUAIS DO PIAUÍ

2ª Fase

Ensino Médio

Etapa Classificatória

RESOLUÇÃO COMENTADA

REALIZAÇÃO:

ACELERA SEDUC

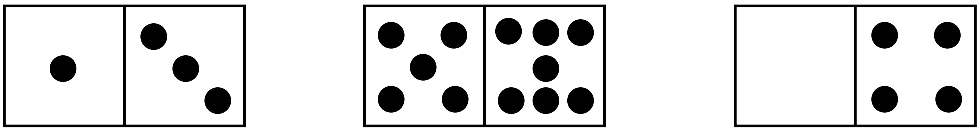
SECRETARIA DA EDUCAÇÃO - SEDUC

GOVERNO DO PIAUÍ

AQUI TEM TRABALHO. AQUI TEM FUTURO.

Problema 1*

Em *Ferius*, os pontos do dominó vão de 0 a 7, ao contrário de um dominó comum, em que os pontos vão de 0 a 6. Uma peça do dominó de Ferius é chamada importante se a soma de seus pontos é par. Por exemplo, os seguintes dominós são importantes:



(a) Quantas peças diferentes possui o dominó jogado em *Ferius*?

Há $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ peças com quantidades diferentes de pontos em cada lado e 8 com quantidades iguais, ou seja, o dominó de *Ferius* tem 28 + 8 = 36 peças diferentes.

Outra solução:
O dominó comum possui 28 peças. Como existem mais 8 novas peças que possuem alguma casa marcando 7 pontos, o dominó de *Ferius* tem 28 + 8 = 36 peças diferentes.

(b) Quantas dessas peças são importantes?

Como a soma de um par e um ímpar é ímpar e há 4 quantidades ímpares de pontos (1, 3, 5, 7) e 4 quantidades pares de pontos (0, 2, 4, 6), há $4 \cdot 4 = 16$ peças que não são importantes. Logo existem $36 - 16 = 20$ peças importantes.

(c) Qual é a soma dos pontos de todas as peças importantes?

Cada quantidade de pontos aparece exatamente 9 vezes. Assim a soma dos pontos de todas as peças é $9 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 7) = 252$. A soma dos pontos de todas as peças que não são importantes é $4 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 7) = 112$, pois cada quantidade de pontos aparece exatamente 4 vezes em peças que não são importantes. Assim, a soma pedida é $252 - 112 = 140$.

Problema 2

Vamos chamar de selo de um número inteiro positivo o par (x; y) no qual x é o número de divisores positivos desse número menores do que ele e y é a soma desses divisores. Por exemplo, o selo do número 10 é (3; 8) pois o número 10 tem como divisores menores do que ele os números 1, 2 e 5, cuja soma é 8. Já o selo do número primo 13 é (1; 1).

(a) Qual é o selo do número 9?

Os divisores positivos de 9 menores que 9 são 1 e 3, logo o selo do número 9 é o par (2, 4).

(b) Qual número tem o selo (2; 3)?

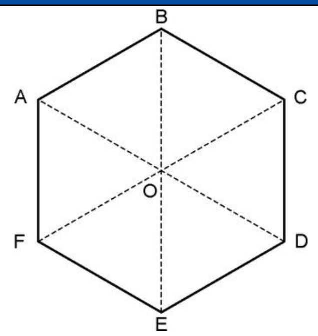
Observe que todo número inteiro positivo tem 1 como divisor. Como o número que estamos procurando tem apenas dois divisores menores que ele, 1 terá que ser um desses divisores e como a soma dos dois divisores é 3, então o outro divisor deve ser 2. Como não há outros divisores, então o número que procuramos é uma potência de 2, e para ter apenas dois divisores menores que ele próprio, então o número deve ser 4.

(c) Há números cujo selo é (6, m). Qual é o menor valor possível para m?

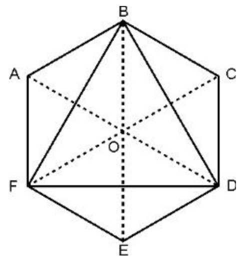
Seja n um número com selo (6, m). n possui 7 divisores contando com ele próprio, logo a única possibilidade é que ele seja da forma p^6, com p primo, e m é igual a $1+p+p^2+\cdots+p^5$. Para que m seja mínimo, p terá que ser mínimo, logo $p = 2$ e $m = 1+2+2^2+\cdots+2^5 = 63$.

Problema 3

O hexágono regular *ABCDEF* e centro O, representado ao lado, é composto de seis triângulos equiláteros de área 6 cm^2 cada um.

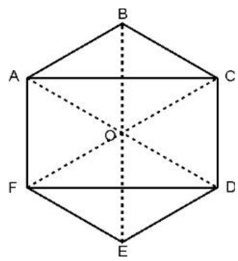


(a) Qual é a área, em cm^2, do triângulo cujos vértices são os pontos B, F e D?



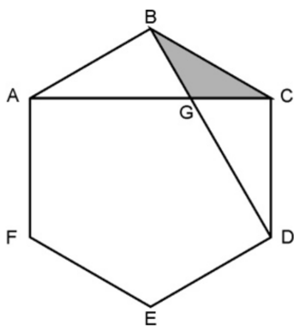
Os quadriláteros ABOF, BCDO e DEFO são todos losangos congruentes e BF, BD e FD são, respectivamente, suas diagonais congruentes. Assim, a área do triângulo BOF é igual à área do triângulo BAF, a do BCD é igual à do BOD e a do DEF é igual à área do DOF. Logo, a área do triângulo BDF é metade da soma das áreas dos três losangos, que é igual à área do hexágono. Como a área do hexágono é igual à soma das áreas dos seis triângulos equiláteros de área 6 cm^2 cada, concluímos que a área do hexágono é $6 \times 6 = 36$ cm^2. Logo, a área do triângulo BDF é $\frac{36}{2} = 18$ cm^2.

(b) Qual é a área, em cm^2, do quadrilátero ACDF?

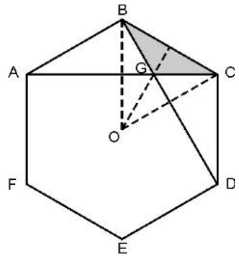


Os losangos ABCO e DEFO têm, cada um, área igual à um terço da área do hexágono, ou seja, 12 cm^2 cada. Logo, suas metades têm área de 6 cm^2 cada uma. Os triângulos equiláteros AFO e CDO têm área de 6 cm^2 cada um. Portanto, a área do quadrilátero ACDF é $6 + 6 + 6 + 6 = 4 \times 6 = 24$ cm^2.

(c) Os triângulos ABC e BCD superpõem-se parcialmente. Qual é a área, em cm^2, da região comum aos dois triângulos, indicada em cinza na figura abaixo?

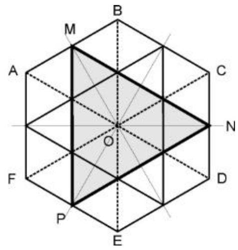


Temos OB = OC = BC, pois o triângulo BCO é equilátero.



Os ângulos OBG e GBC têm ambos 30º (já que a diagonal BD do losango BCDO divide o triângulo equilátero OBC ao meio). Sendo BG lado comum, pelo caso LAL, concluímos que são congruentes os triângulos BOG e BCG. De forma semelhante concluímos que os triângulos BCG e OCG são congruentes. Como a área do triângulo BCO é 6 cm² e os três triângulos acima têm mesma área, concluímos que a área do triângulo BCG é $\frac{6}{3}=2$ cm².

(d) Qual é a área, em cm², do triângulo cujos vértices são os pontos médios dos lados AB, CD e EF?



Sejam M, N e P os pontos médios dos lados AB, CD e EF, respectivamente. Pela simetria da figura, concluímos que o triângulo MNP é equilátero. Traçando o triângulo determinado pelos pontos médios dos três lados restantes, obtemos um triângulo congruente ao triângulo MNP, simétrico ao mesmo em relação à reta BE. Dessa forma, dividimos o hexágono original em 24 triângulos menores e congruentes. O triângulo MNP é composto por 9 desses triângulos. Sua área, portanto, é igual a $\frac{9}{24}=\frac{3}{8}$ da área do hexágono, cuja área é 36 cm². Portando, a área do triângulo é $\frac{3}{8}\times 36=13,5$ cm².

Problema 4

Certa calculadora tem duas teclas especiais: **A** e **B**. A tecla **A** transforma o número x que está no visor em $\frac{1}{x}$. A tecla **B** transforma o número x que está no visor em $1 - x$.

(a) Se a calculadora está com o número $\frac{5}{6}$ no visor e Cláudia aperta a tecla **B**, em seguida aperta a tecla **A**. Qual número deve aparecer no visor da calculadora?

Ao apertar a tecla B a calculadora transforma $\frac{5}{6}$ em $1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$. Agora, ao apertar a tecla A, a calculadora transforma $\frac{1}{6}$ em $\frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$.

(b) Simplifique a expressão

$$1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{x}}}.$$

Resolução:

$$1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\cfrac{x-1}{x}}}=1-\cfrac{1}{1-\cfrac{x}{x-1}}=1-\cfrac{1}{\cfrac{x-1-x}{x-1}}=1-\frac{x-1}{-1}=1+x-1=x$$

(c) Pedro tem um número no visor e aperta sucessivamente, de forma alternada, as duas teclas:

A, B, A, B, ...

Após 1000 operações, o visor mostrava o número 2025. Que número Pedro tinha inicialmente no visor?

Seja x o número inicialmente no visor da calculadora. Observe o que ocorre se Pedro aperta A e B alternadamente até completar 6 vezes:

$$x \xrightarrow{A} \frac{1}{x} \xrightarrow{B} 1-\frac{1}{x} \xrightarrow{A} \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}} \xrightarrow{B} 1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}} \xrightarrow{A} \cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}} \xrightarrow{B} 1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}$$

Como $1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{x}}}=x$, após apertar 6 vezes sucessivamente, de forma alternada, as duas teclas A e B, o número que aparece no visor da calculadora volta a ser igual ao que aparecia inicialmente no visor.

Uma vez que $1000 = 166 \times 6 + 4$, basta analisar apenas as 4 primeiras interações, ou seja,

$$x \xrightarrow{A} \frac{1}{x} \xrightarrow{B} 1-\frac{1}{x} \xrightarrow{A} \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \xrightarrow{B} 1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 2025$$,

de onde temos que

$$1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}} = 2025 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{\frac{x-1}{x}} = 2025 \Leftrightarrow 1-\frac{x}{x-1} = 2025 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1-x}{x-1} = 2025 \Leftrightarrow \frac{-1}{x-1} = 2025 \Leftrightarrow 2025x-2025 = -1 \Leftrightarrow x = \frac{2024}{2025}$$

Problema 5

Num tabuleiro 2 x 2, como o mostrado a seguir, escreveremos números inteiros de 1 a 9 obedecendo à seguinte regra: A > B, C > D, A > C e B > D.

A	***B***
C	***D***

(a) Quantos tabuleiros diferentes existem tais que B = C?

Temos que $A > B$ e $B > D$, logo $A > D$.
Também sabemos que $A > C$ e $C > D$, então podemos afirmar com certeza que "D" é o menor número, pois $B > D$; $C > D$; $A > D$ e "A" é o maior número pois $A > B$; $A > C$; $A > D$.

Se "B" for igual a "C", teremos três números dispostos de tal forma que o menor deles será "D", o maior será igual "A" e o outro será tanto "B" como "C". De quantas formas então eu posso escolher 3 inteiros diferentes entre 1 e 9?

Vamos pensar da seguinte maneira: para escolher o primeiro número eu tenho 9 possibilidades: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9, já para cada escolha do segundo eu tenho outros 8 números para escolher, os de 1 a 9, exceto o primeiro escolhido. Finalmente, para cada possibilidade eu tenho outros 7 inteiros para escolher, os 9 à exceção dos já escolhidos, assim, eu tirei $9 \times 8 \times 7$ possibilidades, ou seja: 504.

Todavia, a ordem dos números não importa, isto é, o menor deve ser "D", o maior "A" e o do meio "B" e "C", e escolhendo dessa forma, os mesmos números são escolhidos 6 vezes (3!). Observe: "x"; "y" e "z" só podem ser usados juntos uma vez, mas nas 504 possibilidades, eles aparecem 6 vezes: $x - y - z$; $x - z - y$; $y - x - z$; $y - z - x$; $z - x - y$ e $z - y - x$

Logo, devemos dividir 504 por 6, assim $\frac{504}{6} = 84$

Finalmente concluímos que existem **84** **=** $\frac{9!}{(9-3)! \cdot 3!}$ tabuleiros diferentes nos quais $A > B; C > D; A > C; B > D; B = C.$

(b) Quantos tabuleiros diferentes existem no total?

Como não podemos definir relação entre B e C, vamos analisar três casos:

1. $B > C \rightarrow A > B > C > D$
2. $B < C \rightarrow A > C > B > D$
3. $B = C \rightarrow A > B = C > D$

Para o caso 1, temos que escolher 4 números distintos de 1 a 9 e pô-los em ordem já descrita (A é o maior, o segundo maior é B e D é o menor), seguindo o raciocínio do quesito "a" temos $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$ possibilidades de escolha sendo que os mesmos 4 números se repetem em 24 escolhas ou 4!.

Nós só utilizamos a; b; c; d uma vez, mas eles ocorrem 24 vezes, apenas alterando a ordem, logo as possibilidades se reduzem:

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{24} = \frac{3024}{24} = 126 = \frac{9!}{(9-4)! \cdot 4!}$$

O caso 2 terá tantas possibilidades quanto o caso 1, apenas trocando B por C e o caso 3 já foi estudado no quesito "a". Assim, o total de tabuleiros é:

$126 + 126 + 84 = 336$.