

GABARITO COMENTADO

Problemas de 01 Ponto

Problema 01

Qual é o valor da soma $\frac{1+2+3}{6} + \frac{6}{1+2+3}$?

- A 1,1
- B $\frac{3}{2}$
- C 2
- D 2,1
- E $\frac{5}{2}$

Gabarito (C).

Solução:

$$\frac{1+2+3}{6} + \frac{6}{1+2+3} = \frac{6}{6} + \frac{6}{6} = 1 + 1 = 2$$

Problema 02

Um edifício possui duas entradas. Em certo dia, uma pessoa entrou pelo térreo, localizado no andar 0, e desceu 1 andar até chegar ao seu local de trabalho, no andar -1. No dia seguinte, essa mesma pessoa entrou pela outra entrada, situada no subsolo, no andar -3, e foi até seu local de trabalho. Nesse segundo dia, ela:

- A não subiu ou desceu algum andar
- B desceu 02 andares
- C desceu 01 andar
- D subiu 03 andares
- E subiu 02 andares

Gabarito (E).

Solução:

Para ir da entrada no subsolo (andar -3) até o local de trabalho (andar -1), a pessoa precisa subir 2 andares (passando pelo -2 até chegar ao -1). Matematicamente, o deslocamento é dado pela diferença: $-1 - (-3) = -1 + 3 = 2$ andares para cima.

Problema 03

Ana, Ágata e Alice encontraram André em uma trilha. André estava sem água, então cada uma das meninas deu a ele metade da água de sua garrafa.

Depois disso,

- A André ficou com a mesma quantidade de água que as três meninas juntas.
- B As quatro crianças ficaram com a mesma quantidade de água.
- C Juntas, as meninas ficaram com mais água do que André.
- D André ficou com mais água do que as três meninas juntas.
- E André ficou com a mesma quantidade de água que duas das meninas.

Gabarito (A).

Solução:

Se X, Y e Z **indicam** a quantidade de água que havia nas garrafas de Ana, Ágata e Alice, após socorrerem André elas ficaram com $X/2$, $Y/2$ e $Z/2$ de água nas suas garrafas. André ficou com $X/2 + Y/2 + Z/2$, que é **igual à soma** das quantidades de água que restaram com as três meninas.

Problema 04

Ana é a goleira de um time de futsal. Além dela, há outras 5 jogadoras, e a treinadora deve escolher 4 delas para começar a partida.

De quantas maneiras essa escolha pode ser feita?

- A 4
- B 5
- C 6
- D 10
- E 20

Gabarito (B).

Solução 1:

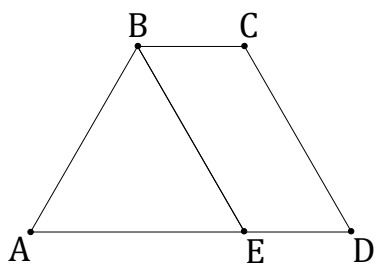
Cada time inicial corresponde a escolher qual jogadora ficará de fora. Como são 5 jogadoras, há 5 escolhas possíveis.

Solução 2:

Como Ana já é a goleira, ela está sempre no time inicial. Então basta escolher 4 jogadoras entre as 5 disponíveis. Isto é, $\binom{5}{4} = 5$ escolhas distintas para iniciar a partida.

Problema 05

Na figura, $ABCD$ é um trapézio e $BCDE$ é um paralelogramo.



Se a área do paralelogramo é igual à área do triângulo ABE , então:

- A $AE = ED$
- B $3 \cdot AE = 2 \cdot ED$
- C $2 \cdot AE = 3 \cdot ED$
- D $AE = 2 \cdot ED$
- E $2 \cdot AE = ED$

Gabarito (D).

Solução:

A área do paralelogramo é dada por $ED \times altura$, enquanto a área do triângulo é dada por $\frac{AE \times altura}{2}$.

Como a altura desses dois polígonos é a mesma, então

$$ED \times altura = \frac{AE \times altura}{2} \Rightarrow ED = \frac{AE}{2},$$

ou seja, $AE = 2 \cdot ED$.

Problemas de 03 Pontos

Problema 06

Os participantes de uma dinâmica foram posicionados em círculo, igualmente espaçados, e numerados consecutivamente a partir de 1. Se a pessoa de número 18 está diametralmente oposta à de número 97, quantos participantes há ao todo?

- A 156
- B 158
- C 160
- D 162
- E 164

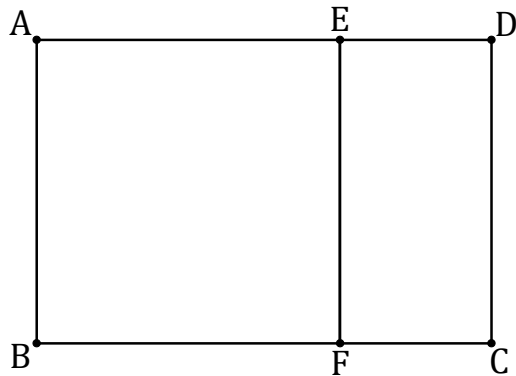
Gabarito (B).

Solução:

Em uma disposição circular com numeração sequencial e espaçamento igual, a diferença entre a numeração de duas pessoas diametralmente opostas corresponde exatamente à metade do total de participantes (um semicírculo). Sendo assim, calculamos a diferença: $97 - 18 = 79$. Como 79 representa a metade dos participantes, o número total de pessoas na dinâmica é $2 \times 79 = 158$.

Problema 07

Na figura, o retângulo ABCD tem altura igual a $\frac{2}{3}$ de sua base, e o retângulo CDEF tem base igual a $\frac{1}{2}$ da altura do retângulo ABCD.



Qual é a razão entre a área do retângulo ABCD e a área do retângulo CDEF? Em outras palavras, quantas vezes o retângulo CDEF cabe no retângulo ABCD?

- A 2
- B 3
- C 4
- D 5
- E 6

Gabarito (B).

Solução:

Como os retângulos ABCD e CDEF possuem a mesma altura, a razão entre as suas áreas é igual à razão entre as suas bases.

Portanto, basta dividir a base do maior pela base do menor:

$$\frac{x}{\frac{1}{3}x} = 3.$$

Problema 08

Sabendo-se que $0,666\dots = \frac{2}{3}$. Qual é a fração irredutível equivalente a $0,1666\dots$?

- A $\frac{1}{3}$
- B $\frac{1}{4}$
- C $\frac{1}{5}$
- D $\frac{1}{6}$
- E $\frac{1}{7}$

Gabarito: (D).

Solução 1:

Ao dividir o numerador pelo denominador nas alternativas indicadas encontra-se a dízima $0,1666\dots$ na divisão de 1 por 6.

Solução 2:

Uma maneira interessante de resolver está na forma de reescrever a dízima $0,1666\dots$, como segue:

$$0,1666\dots = \frac{1,666\dots}{10} = \frac{1 + 0,666\dots}{10} = \frac{1 + \frac{2}{3}}{10} = \frac{1}{6}.$$

Solução 3:

$$0,1666\dots = 0,6666\dots - 0,5 = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

Problema 09

Sabendo que $P(x) = -2x + 7$ e $Q(x) = 3x - 2$, qual é o valor da expressão $P(Q(1)) + Q(P(1))$?

- A 5
- B 6
- C 10
- D 13
- E 18

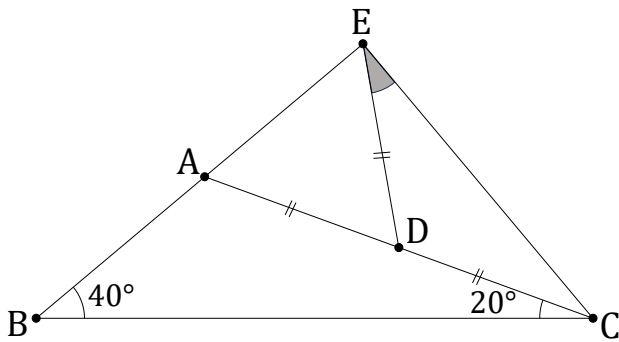
Gabarito (E).

Solução:

$$\begin{aligned} & P(Q(1)) + Q(P(1)) \\ &= P(3 \cdot 1 - 2) + Q(-2 \cdot 1 + 7) \\ &= P(1) + Q(5) \\ &= (-2 \cdot 1 + 7) + (3 \cdot 5 - 2) \\ &= 5 + 13 \\ &= 18. \end{aligned}$$

Problema 10

Na figura, $AD = CD = DE$, além disso, $\widehat{ABC} = 40^\circ$ e $\widehat{BCA} = 20^\circ$.



Qual é a medida do ângulo \widehat{CED} ?

- A 55°
- B 50°
- C 40°
- D 30°
- E 20°

Gabarito (D).

Solução:

Note que \widehat{DAE} é ângulo externo ao triângulo ABC, então $\widehat{DAE} = 40^\circ + 20^\circ = 60^\circ$. Como ADE é isósceles de base \overline{AE} , temos $\widehat{AED} = 60^\circ$. Além disso, \widehat{CDE} é ângulo externo ao triângulo ADE, e então $\widehat{CDE} = 60^\circ + 60^\circ = 120^\circ$. Sendo CDE isósceles de base \overline{CE} , temos $\widehat{CED} = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$.

Problemas de 05 Pontos

Problema 11

A tabela mostra o desempenho das equipes do Grupo A da Copa Escolar de Futsal.

Equipe	Jogos	V	E	D	GM	GS
Lótus	3	2	1	0	5	2
Néon	3	1	2	0	4	2
Órion	3	0	1	2	2	?
Pégaso	3	0	2	1	3	6

Legenda:

V = vitórias, E = empates, D = derrotas, GM = gols marcados, GS = gols sofridos.

Quantos gols a equipe Órion sofreu?

- A 4
- B 5
- C 6
- D 7
- E 8

Gabarito (A).

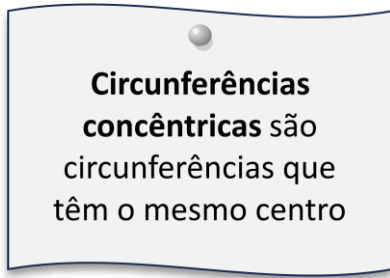
Solução:

Em cada partida, todo gol marcado por uma equipe corresponde a um gol sofrido pela equipe adversária. Portanto, ao somarmos os valores da coluna **GM**, devemos obter o mesmo total da soma dos valores da coluna **GS**.

Isso garante que o número de gols sofridos pela equipe Órion é igual a 4.

Problema 12

Considere duas circunferências concêntricas, de raios 1 e 5. Qual das alternativas pode ser o raio de uma circunferência tangente a ambas?

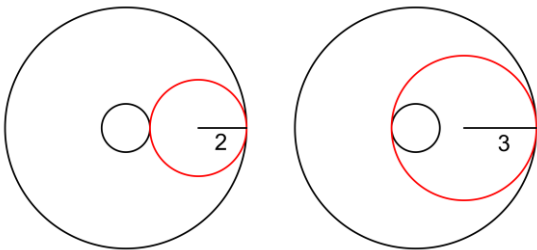


- A 1
- B 3
- C 4
- D 5
- E 6

Gabarito (B).

Solução:

Existem duas construções de circunferências tangentes simultaneamente às circunferências de raios 1 e 5 (figura): uma tem raio igual a 2 e a outra tem raio igual a 3.



Problema 13

Quantos números inteiros satisfazem à equação

$$(x^2 - 3x + 1)^{x+1} = 1?$$

- A 1
- B 2
- C 3
- D 4
- E 5

Gabarito (D).

Solução:

As possibilidades para que a expressão do lado esquerdo seja igual a 1, são:

- base $x^2 - 3x + 1 = 1$;
- expoente $x + 1 = 0$;
- base $x^2 - 3x + 1 = -1$ e expoente $x + 1$ par;

No primeiro caso, temos $x^2 - 3x \Rightarrow x(x - 3) = 0$, e então $x = 0$ ou $x = 3$.

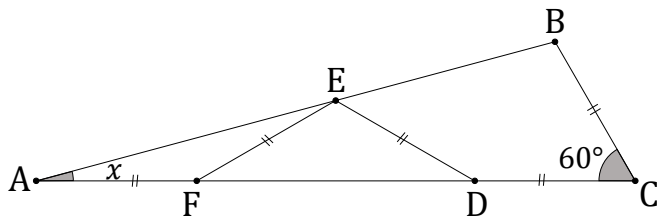
No segundo caso, $x = -1$.

No terceiro caso, devemos ter $x^2 - 3x + 2 = 0$, o que implica em $x = 1$ ou $x = 2$, mas o expoente precisa ser par e isso só ocorre em $x = 1$.

Logo, a solução da equação é $S = \{-1, 0, 1, 3\}$.

Problema 14

No triângulo ABC o ângulo do vértice C mede 60° e $BC = CD = DE = EF = FA$.



A medida do ângulo x , é igual a:

- A** 15°
- B** 20°
- C** $22,5^\circ$
- D** 25°
- E** 30°

Gabarito (A).

Solução:

O triângulo AEF é isósceles, então $\widehat{AEF} = x$. Como \widehat{DFE} é externo ao triângulo AEF , então $\widehat{DFE} = 2x$. O triângulo DEF é isósceles, então $\widehat{EDF} = \widehat{DFE} = 2x$. Como \widehat{BED} é externo ao triângulo ADE , então $\widehat{DEB} = x + 2x = 3x$. Traçando o segmento \overline{BD} , vemos que o triângulo BCD é isósceles, com ângulo oposto a base igual a 60° e, conseqüentemente, é também equilátero. Assim, $BD = CD = DE$. Daí percebemos que o triângulo BDE também é isósceles, obtendo assim $\widehat{DBE} = \widehat{DEB} = 3x$. Como \widehat{BDC} é externo ao triângulo ABD , temos $\widehat{BDC} = x + 3x = 4x$. Por outro lado, como \widehat{BDC} é ângulo interno do triângulo equilátero BCD , temos $4x = 60^\circ \Rightarrow x = 15^\circ$.

Problema 15

Quantos números de quatro algarismos têm exatamente dois algarismos pares?

8158, 2479, 5650 são números de quatro algarismos com exatamente dois algarismos pares. Note que:

8158: Pares(8, 8)

2479: Pares (2, 4)

5650: Pares (6, 0)

E, como exemplo negativo: **0563** NÃO é um número de quatro algarismos.

- A** 2750
- B** 3000
- C** 3375
- D** 3750
- E** 4225

Gabarito (C).

Solução:

Utilizando **P** para algarismo par e **I** para algarismo ímpar, os números procurados podem ter seis configurações possíveis: PPII, PIPI, PIIP, IIPP, IPIP e IPPI.

Para cada uma das três primeiras configurações existem $4 \times 5 \times 5 \times 5 = 500$ números possíveis. Para cada uma das três últimas configurações existem $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ números possíveis. Logo, o total de números procurados é $3 \times (500 + 625) = 3375$.

Problemas de 07 Pontos**Problema 16**

Escolhem-se 25 números de 1 a 60. Considere os números primos menores que 60 que não dividem nenhum dos 25 números escolhidos. Qual é a maior quantidade possível desses números primos

- A 12
- B 13
- C 14
- D 15
- E 16

Gabarito (C)**Solução:**

Como queremos a maior quantidade possível de números primos que não dividem nenhum dos 25 números escolhidos, então é natural que cada um dos 25 números escolhidos inicialmente tenha, em sua fatoração, a menor quantidade possível de números primos diferentes.

Os números 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, 50, 54, 60 são todos múltiplos de, no máximo, três primos: 2, 3 ou 5. Portanto, como existem 17 primos de 1 a 60, a maior quantidade deles que não divide nenhum dos 25 números é $17 - 3 = 14$.

Problema 17

As faces de um dado são numeradas de 1 a 6, de modo que 1 e 6, 2 e 5, 3 e 4 aparecem em faces opostas. Em um jogo antigo entre dois apostadores, três dados são lançados simultaneamente e observa-se a soma dos números das faces voltadas para cima.

- Se a soma for maior que 10, vence o jogador que lançou os dados.
- Se a soma for menor ou igual a 10, vence o outro jogador.

Com respeito à probabilidade de vitória de um dos apostadores, é correto afirmar que:

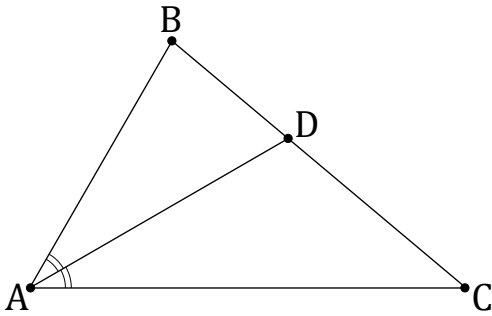
- A Não é possível decidir sem enumerar todos os resultados possíveis.
- B O outro jogador tem maior probabilidade de vencer.
- C O jogador que lançou os dados tem maior probabilidade de vencer.
- D A probabilidade de vitória depende de quais números aparecem em faces opostas.
- E Os dois jogadores têm a mesma probabilidade de vencer.

Gabarito (E)**Solução:**

A soma dos números das faces de cima, juntamente com os números das faces de baixo, dá igual a $3 \times 7 = 21$. Assim, se a soma dos números das faces de cima for pelo menos 11, a soma dos números das faces de baixo será no máximo 10, e vice-versa. Então, para cada resultado ganhador há um resultado perdedor, de modo que ambos os jogadores têm 50% de chances de ganhar.

Problema 18

No triângulo ABC , tem-se $\widehat{BAC} = 60^\circ$. A bissetriz interna desse ângulo encontra o lado BC no ponto D . Sabendo que $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BD}$, determine a medida do ângulo \widehat{ABC} .



- A 40°
- B 54°
- C 60°
- D 72°
- E 80°

Gabarito (E)**Solução:**

Tracemos o segmento $\overline{DB'}$, de modo que B' seja um ponto sobre o lado \overline{AC} e $AB' = AB$. Dessa forma, $CB' = DB = DB'$ e os triângulos ABD e $AB'D$ são congruentes, o que implica que $\widehat{AB'D} = \widehat{ABD} = x$. Como $\widehat{AB'D}$ é ângulo externo ao triângulo CDB' , e este por sua vez é isósceles de base CD , então $\widehat{B'CD} = \widehat{B'DC} = x/2$. Somando as medidas dos ângulos internos do triângulo ABC , temos

$$60^\circ + x + \frac{x}{2} = 180^\circ \Rightarrow \frac{3x}{2} = 120^\circ \Rightarrow x = 80^\circ.$$

Problema 19

Uma escada tem 10 degraus numerados de 1 a 10. Beto parte do degrau 1 e sobe até o degrau 10, podendo avançar 1, 2 ou 3 degraus por vez. Em seguida, ele desce do degrau 10 ao degrau 1, também podendo descer 1, 2 ou 3 degraus por vez. Na descida, Beto não pode pisar em nenhum degrau por onde passou na subida, exceto nos degraus 1 e 10.

De quantas maneiras Beto pode fazer a subida de modo que exista exatamente um caminho possível de descida?

- A 8
- B 10
- C 12
- D 14
- E 16

Gabarito (C)

Solução:

Vamos pensar na descida, e não na subida.

Como Beto não pode pisar na descida em nenhum degrau que já tenha usado na subida, exceto nos degraus 1 e 10, os degraus disponíveis para a descida são exatamente:

- o degrau 10,
- o degrau 1,
- e os degraus não usados na subida.

Para que a descida seja única, sempre que Beto estiver em um degrau, entre os três próximos degraus abaixo possíveis,

$$n - 1, n - 2, n - 3,$$

apenas um deles pode estar disponível para a descida.

De fato, se dois deles estivessem disponíveis, então haveria duas escolhas possíveis naquele ponto, e a descida não seria única.

Assim, podemos montar uma árvore de possibilidades para a descida, começando no degrau 10.

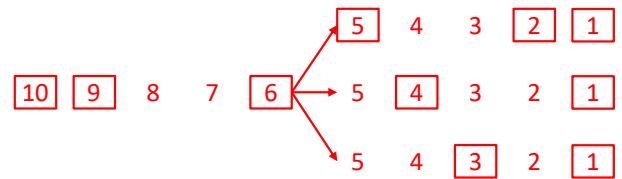
Na descida, Beto pode ir do 10 para: 9, 8 ou 7.

Vamos analisar cada caso.

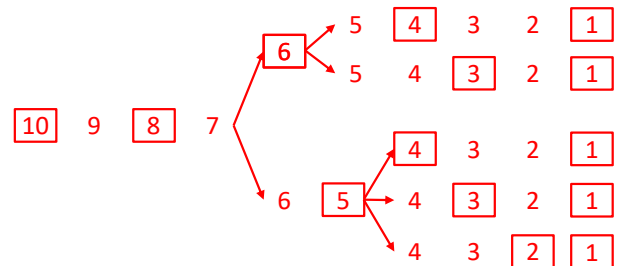
Caso 1: A descida começa indo para o Degrau 9

Se o primeiro passo da descida for $10 \rightarrow 9$ (um salto de 1), o próximo salto obrigatoriamente deve ser grande para evitar a formação de "atalhos". Ele

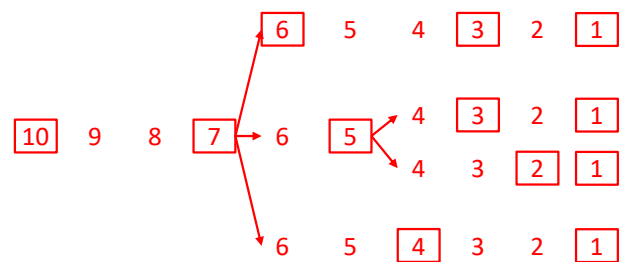
precisa descer direto para o degrau 6. A partir do 6, a árvore se ramifica em 3 finais possíveis:

**Caso 2: A descida começa indo para o Degrau 8**

Se o primeiro passo for $10 \rightarrow 8$, ele tem duas opções de caminho a partir daí (descer para o 6 ou para o 5), que geram novas ramificações totalizando 5 possibilidades:

**Caso 3: A descida começa indo para o Degrau 7**

Se o primeiro passo for $10 \rightarrow 7$ (o salto máximo logo de cara), ele tem três opções viáveis a partir do 7, que abrem um total de 4 possibilidades:



Ao analisarmos as ramificações das três árvores, somamos 3 caminhos possíveis na primeira, 5 na segunda e 4 na terceira. Portanto, conclui-se que existem exatamente 12 maneiras diferentes de Beto realizar o trajeto completo de subida e descida, respeitando rigorosamente todas as regras estabelecidas no problema.

Problema 20

Há 4 molhos de chaves, cada um contendo 4 chaves. Sabe-se que cada chave pesa exatamente 10 g, exceto as de um dos molhos, em que cada chave pesa 1 mg a menos.

Dispõe-se apenas de uma balança digital, capaz de indicar com precisão o peso de qualquer conjunto de chaves colocado sobre ela. Se necessário, pode-se retirar qualquer quantidade de chaves de seus respectivos molhos e colocá-las na balança, em qualquer combinação.

Qual é o menor número de pesagens necessárias para identificar o molho que contém as chaves mais leves?

- A** 1
- B** 2
- C** 4
- D** 8
- E** 10

Gabarito: (A)

Solução:

O menor número de pesagens é 1, vejamos:

Numere os molhos de chaves com números de 1 a 4. Retire:

- 1 chave do molho 1,
- 2 chaves do molho 2,
- 3 chaves do molho 3,
- 4 chaves do molho 4.

Ao todo, serão pesadas $1+2+3+4=10$ chaves. Se todas pesassem 10 g, o peso total seria $10 \times 10 = 100$ g.

Mas, como as chaves de um dos molhos de chaves pesam 1 mg a menos cada uma, o peso medido ficará menor que 100 g por uma quantidade que depende do número do molho de chaves defeituoso:

- molho 1: falta 1 mg
- molho 2: faltam 2 mg
- molho 3: faltam 3 mg
- molho 4: faltam 4 mg