# TME²

# 4º TORNEIO DE MATEMÁTICA DAS ESCOLAS ESTADUAIS DO PIAUÍ

**3ª Fase Classificatória**

Ensino Médio

08 de outubro de 2026

**QUADRO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO:**

ESTUDANTE:

GRE:

MUNICÍPIO:

ESCOLA:

_____

Assinatura do(a) Estudante

**INSTRUÇÕES:**

1. Confira atentamente as suas informações contidas no QUADRO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO. Caso identifique qualquer problema ou inconsistência, comunique imediatamente ao professor ou ao responsável pela aplicação do exame.
2. A duração da prova é de 2 horas e 30 minutos. Você só poderá deixar a sala 45 minutos após o início da prova. Ao terminar a prova, entregue-a ao aplicador.
3. Não é permitido:
   - usar instrumentos de desenho, calculadoras ou qualquer fonte de consulta;
   - comunicar-se com outras pessoas, além do aplicador de provas;
   - usar quaisquer aparelhos eletrônicos (celulares, tablets, relógios com calculadora etc.).

O não cumprimento dessas regras resultará em sua desclassificação.

4. Esta prova é discursiva e contêm 05 problemas, com 20 pontos cada, totalizando 100 pontos.
5. A solução de cada problema deve ser escrita na página reservada para ela, de maneira organizada e legível.
6. Na correção serão considerados todos os raciocínios que você apresentar. Tente resolver o maior número possível de itens de todos os problemas.
7. **Respostas sem justificativa não serão consideradas na correção.**
8. Os problemas podem ser respondidos a lápis ou a caneta, de forma legível.
9. Não se esqueça de assinar no local indicado no QUADRO DE IDENTIFICAÇÃO DO CANDIDATO.

**Boa prova!**

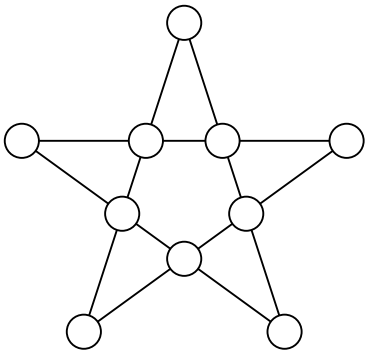
**REALIZAÇÃO:**

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO – SEDUC

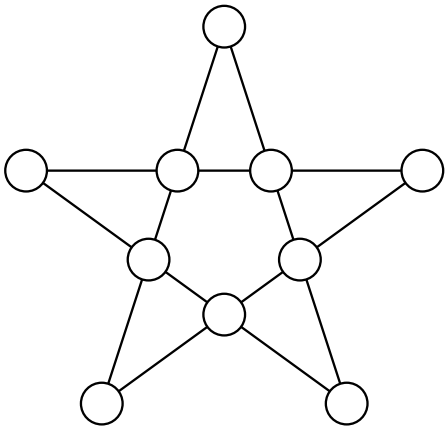
GOVERNO DO ESTADO DO PIAUÍ

## Problema 1

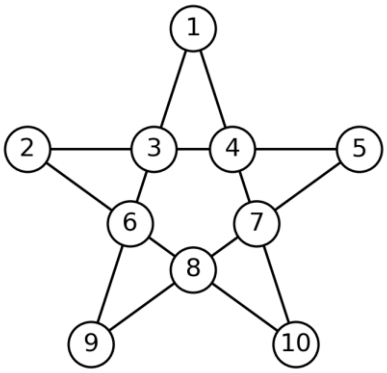
Desejamos escrever os inteiros de 1 a 10 nas casas do desenho abaixo de tal forma que quaisquer quatro números alinhados aparecem em ordem crescente ou decrescente.



a) (6 pontos) Mostre uma maneira de dispor os números respeitando estas condições.



Uma disposição possível




Os cinco alinhamentos, lidos do menor para o maior, são:

$2 < 3 < 4 < 5$; $1 < 3 < 6 < 9$; $1 < 4 < 7 < 10$; $2 < 6 < 8 < 10$; $5 < 7 < 8 < 9$.

Logo, todos estão em ordem crescente ou decrescente, conforme o sentido de leitura.

b) (8 pontos) Quais números podem aparecer nas pontas da estrela?

Cada casa interna pertence a dois alinhamentos e precisa ter, em cada um, um número menor e um maior que o seu. Assim, 1 e 2 não podem ficar nas casas internas, nem 9 e 10. Esses quatro números devem estar nas pontas.

As pontas com 1 e 2 não podem estar no mesmo alinhamento, pois não há dois números entre eles. Na estrela, cada uma das demais pontas fica alinhada com pelo menos uma dessas duas. As duas casas internas desse alinhamento têm valores pelo menos 3 e 4; logo, a quinta ponta vale pelo menos 5. Pelo mesmo raciocínio, usando 9 e 10, ela vale no máximo 6.

Portanto, as pontas contêm {1, 2, 5, 9, 10} ou {1, 2, 6, 9, 10}.

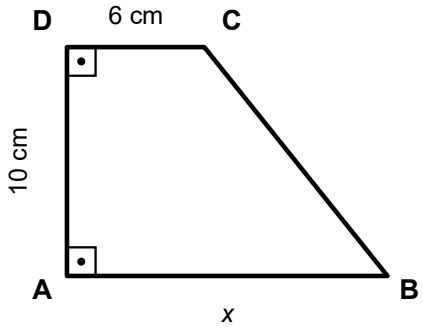
O primeiro caso está na figura. O segundo é obtido trocando 5 e 6, sem alterar a ordem dos números nos alinhamentos.

c) (6 pontos) Quais números podem aparecer nas outras cinco posições?

As cinco casas internas recebem os números restantes: {3, 4, 6, 7, 8} ou {3, 4, 5, 7, 8}. Portanto, 3, 4, 7 e 8 sempre ficam no interior, acompanhados de 5 ou 6.

## Problema 2

Considere um trapézio retângulo ABCD, com ângulos retos nos vértices A e D. Sabe-se que a altura AD mede 10 cm e a base menor CD mede 6 cm. A base maior AB possui uma medida variável $x$, tal que $x > 6$ cm.




Com base nessas informações,

a) (6 pontos) Calcule a área da região trapezoidal ABCD quando a base maior $x$ for igual a 14 cm.

Aplicando a fórmula da área do trapézio $A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$, com $B = 14$, $b = 6$ e $h = 10$, temos:

$$A = \frac{(14+6)\cdot 10}{2} = \frac{20\cdot 10}{2} = \frac{200}{2} = 100$$

Portanto, a área do trapézio para $x = 14$ cm é $\mathbf{100\ cm^2}$.

b) (7 pontos) Escreva a lei de formação da função $A(x)$, que expressa a área do trapézio ABCD em função da medida $x$ da base maior. Em seguida, determine o valor de $x$ para que a área desse trapézio seja exatamente igual a 120 cm².

Para a lei de formação, aplicamos novamente a fórmula da área do trapézio, deixando a base maior como $x$:

$$A(x) = \frac{(x+6)\cdot 10}{2} \Rightarrow A(x) = (x+6)\cdot 5 \Rightarrow A(x) = 5x + 30$$

Para encontrar o valor de $x$ que resulta em uma área de 120 cm², igualamos a função a 120:

$$5x + 30 = 120 \Rightarrow 5x = 120 - 30 \Rightarrow 5x = 90 \Rightarrow x = \frac{90}{5} \Rightarrow x = 18$$

Portanto, a lei de formação é a função afim $\boldsymbol{A(x) = 5x + 30}$ e a base maior deverá medir $\mathbf{18\ cm}$.

c) (7 pontos) Considerando o trapézio formado com a área de 120 cm², calcule a medida do lado oblíquo BC.

Com $x = 18$ cm, traçamos a altura a partir do vértice C até a base AB, chamando esse ponto de encontro de H. Isso divide o trapézio em um retângulo AHCD e um triângulo retângulo BHC.

Como AH = CD = 6 cm, o segmento HB medirá a diferença: $HB = 18 - 6 = 12$ cm.

A altura CH é igual a AD, ou seja, 10 cm.

Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo BHC para encontrar a hipotenusa BC:

$$BC^2 = CH^2 + HB^2 \Rightarrow BC^2 = 10^2 + 12^2 \Rightarrow BC^2 = 100 + 144 \Rightarrow BC^2 = 244 \Rightarrow BC = \sqrt{244}$$

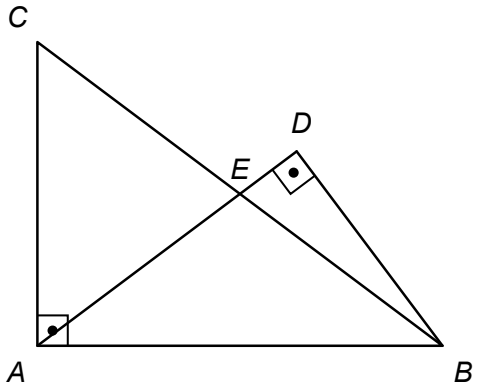
Fatorando o $\sqrt{244}$, temos:

$$BC = \sqrt{4\cdot 61} = 2\sqrt{61}$$

Portanto, a medida do lado oblíquo BC nas condições pedidas é $2\sqrt{61}$cm.

## Problema 3

Na figura, os triângulos $ABC$ e $ABD$ são retângulos em $A$ e $D$, respectivamente. O ponto $E$ é a interseção dos segmentos $AD$ e $BC$. Sabe-se que $AC = 15$ cm, $AD = 16$ cm e $BD = 12$ $cm$.




(a) (5 pontos) Determine o comprimento de $AB$.

No triângulo retângulo ABD, pelo Teorema de Pitágoras,

$$AB^2 = 16^2 + 12^2 = 400.$$

Portanto, $AB = 20$ cm.

(b) (8 pontos) Mostre que $E$ é o ponto médio de $BC$.

No triângulo ABC, $BC^2 = 15^2 + 20^2 = 625$, logo $BC = 25$ cm. Assim, os triângulos ABC e ADB têm lados proporcionais:

$15 : 20 : 25 = 12 : 16 : 20 = 3 : 4 : 5$,

e, portanto, são semelhantes. Da semelhança, $\angle ABC = \angle DAB$ e $\angle ACB = \angle DBA$. Como E pertence a AD e a BC, temos $\angle EAB = \angle EBA$, daí $AE = EB$.

Além disso, $\angle CAE = 90° - \angle EAB$ e $\angle ACE = \angle DBA = 90° - \angle DAB$. Logo $\angle CAE = \angle ACE$ e $CE = AE$. Portanto, $CE = EB$ e E é o ponto médio de BC.

(c) (7 pontos) Determine a área do triângulo $ABE$.

Como E é o ponto médio de BC, os triângulos ABE e ACE têm a mesma área. A área de ABC é

$\text{Área(ABC)} = (15 \cdot 20)/2 = 150$ cm².

Logo, $\text{Área(ABE)} = 150/2 = 75$ cm².

## Problema 4

O quadrado da Figura I é chamado *especial* porque:

1. ele está dividido em 16 quadradinhos iguais;
2. em cada linha e em cada coluna aparecem, uma única vez, as letras a, b, c e d;
3. em cada um dos quatro blocos 2 × 2, indicados por A, B, C e D na Figura II, também aparecem, uma única vez, as letras a, b, c e d.

| | | | |
|---|---|---|---|
| *d* | *b* | *a* | *c* |
| *a* | *c* | *b* | *d* |
| *c* | *a* | *d* | *b* |
| *b* | *d* | *c* | *a* |

Figura I

| | |
|---|---|
| *A* | *B* |
| *C* | *D* |

Figura II = Blocos 2 x 2

**a) (3 pontos)** Complete o quadrado abaixo de modo que ele se torne especial.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | *b* | | |
| *c* | *d* | | |
| | | *a* | |
| | | | *b* |

No bloco superior esquerdo falta a letra a, então ela ocupa a primeira casa. Na segunda coluna faltam a e c; como a terceira linha já contém a, nela entra c e, na quarta linha, entra a. A partir daí, as condições das linhas e colunas determinam sucessivamente as demais letras. O preenchimento é único:

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | b | d | c |
| c | d | b | a |
| b | c | a | d |
| d | a | c | b |

Portanto, esse é o único quadrado especial que completa o item.

**b) (4 pontos)** É possível completar o quadrado abaixo de modo a obter um quadrado especial? Por quê?

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | | |
| $c$ | $d$ | | |
| | | | $b$ |
| | | | $a$ |

Não é possível. No bloco superior esquerdo já aparecem a, b, c e d. Assim, na segunda linha, as duas casas da direita precisam ser a e b. Porém, na quarta coluna já aparecem b e a nas duas casas inferiores; portanto, as duas casas superiores dessa coluna precisam ser c e d. A casa da segunda linha e quarta coluna teria de pertencer aos dois conjuntos ao mesmo tempo, o que é impossível.

Logo, o quadrado do item (b) não pode ser completado.

**c) (6 pontos)** Exiba todas as maneiras de completar o quadrado abaixo de modo a obter um quadrado especial.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | | |
| $c$ | $d$ | | |
| | | | |
| | | | $a$ |

Na segunda linha, as duas casas vazias devem ser a e b. Como a última casa da quarta coluna já contém a, a casa da segunda linha e quarta coluna deve ser b; portanto, a outra é a. Restam dois casos para a terceira e a quarta casas da primeira linha: c,d ou d,c. Esses casos produzem exatamente as três completações abaixo:

**1ª maneira**

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | b | c | d |
| c | d | a | b |
| b | a | d | c |
| d | c | b | a |

**2ª maneira**

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | b | c | d |
| c | d | a | b |
| d | a | b | c |
| b | c | d | a |

**3ª maneira**

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | b | d | c |
| c | d | a | b |
| b | a | c | d |
| d | c | b | a |

**d) (7 pontos)** Quantos quadrados especiais existem?

Vamos contar os quadrados especiais por etapas.

**1. Escolha da primeira linha**

A primeira linha deve conter as quatro letras *a, b, c, d*, sem repetição. Portanto, existem

$$4! = 24$$

maneiras de escolher a primeira linha.

Fixemos, para a contagem, a primeira linha **a b c d**.

| | | | |
|---|---|---|---|
| a | b | c | d |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

**2. Possibilidades para a segunda linha**

No bloco superior esquerdo já aparecem a e b, então faltam c e d. No bloco superior direito já aparecem c e d, então faltam a e b. Assim, a segunda linha pode ser apenas uma das quatro seguintes:

**cdab, cdba, dcab, dcba**

### 3. Como cada caso pode ser completado

Agora verificamos quantas maneiras existem de preencher as duas últimas linhas em cada um desses quatro casos. Surgem dois tipos:

| Segunda linha | Nº de completações | Contribuição |
|---|---|---|
| cdab | 4 | 4 |
| dcba | 4 | 4 |
| cdba | 2 | 2 |
| dcab | 2 | 2 |

Portanto, com a primeira linha já fixada, existem

$$4 + 4 + 2 + 2 = 12$$

quadrados especiais.

### 4. Contagem total

Como a primeira linha pode ser escolhida de 24 maneiras e, para cada escolha, existem 12 maneiras de completar o quadrado, o total é

$$24 \times 12 = 288$$

**Resposta: 288 quadrados especiais.**

**Observação para a correção:** a ideia central é fixar a primeira linha, contar as quatro possibilidades para a segunda e, em seguida, separar essas quatro possibilidades em dois tipos, que admitem 4 ou 2 completações.

## Problema 5

Para um inteiro positivo $n$, denote por $S(n)$ a soma de seus algarismos. Dizemos que $n$ é **supersticioso** quando

$$n = 19 \cdot S(n).$$

Por exemplo, 399 é supersticioso, pois

$$S(399) = 3 + 9 + 9 = 21$$

e

$$19 \cdot 21 = 399.$$

(a) (7 pontos) Mostre que nenhum número supersticioso pode ter quatro ou mais algarismos.

Vamos mostrar que um número supersticioso tem três algarismos.

Se $n$ tem um algarismo, então $S(n) = n$, e $n = 19S(n)$ seria impossível.

Se $n = 10a + b$ tem dois algarismos, então

$$19S(n) = 19(a + b) > 10a + b = n.$$

Logo, também não pode ter dois algarismos.

Se $n$ tivesse quatro algarismos, então

$$S(n) \leq 9 + 9 + 9 + 9 = 36.$$

Logo,

$$n = 19S(n) \leq 19 \cdot 36 = 684,$$

o que é impossível, pois um número de quatro algarismos é pelo menos 1000.

Com cinco ou mais algarismos, a impossibilidade é ainda maior: a soma dos algarismos aumenta, no máximo, 9 a cada novo algarismo, enquanto o menor número com essa quantidade de algarismos passa de 1000 para 10000, depois 100000, e assim por diante.

Portanto, um número supersticioso não pode ter quatro ou mais algarismos.

(b) (6 pontos) Se $\overline{abc}$ é um número supersticioso, mostre que seus algarismos satisfazem $b + 2c = 9a$.

Escreva

$$n = \overline{abc} = 100a + 10b + c.$$

Como $n = 19 \cdot S(n)$,

$$100a + 10b + c = 19(a + b + c).$$

Daí,

$$81a = 9b + 18c,$$

ou seja,

$$9a = b + 2c.$$

(c) (7 pontos) Determine todos os números supersticiosos e calcule a soma deles.

Como $b \leq 9$ e $c \leq 9$,

$$9a = b + 2c \leq 27,$$

logo $a = 1, 2$ ou $3$.

Para $a = 1$:

$$b + 2c = 9,$$

obtendo

$$114, 133, 152, 171, 190.$$

Para $a = 2$:

$$b + 2c = 18,$$

obtendo

$$209, 228, 247, 266, 285.$$

Para $a = 3$:

$$b + 2c = 27,$$

obtendo apenas o número 399.

Portanto, existem 11 números supersticiosos: 114, 133, 152, 171, 190, 209, 228, 247, 266, 285 e 399.